РАЗДЕЛ IX. МАТЕМАТИКА

Бондаренко Н.И., Лебедев С.В., Терентьев Ю.И.

Устойчивая разностная схема решения задачи неустановившегося движения вязкого потока в трубе

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (Россия, Москва)

doi: 10.18411/trnio-11-2021-75

Аннотация

Рассматривается неустановившееся одномерное течение вязкой сжимаемой жидкости в полностью заполненной однониточной упругой цилиндрической трубе. Плотность жидкости и её вязкость принимаются постоянными, а скорость звука в потоке - зависящей от упругих свойств стенок трубы. На основе конечно-разностного аналога уравнений движения и неразрывности потока получены зависимости между скоростью и давлением потока в произвольном сечении трубы.

Ключевые слова: трубопровод, давление, скорость, расход жидкости, разностная схема, устойчивость.

Abstract

An unsteady one-dimensional flow of a viscous compressible fluid in a fully filled single-thread elastic cylindrical tube is considered. The density of the liquid and its viscosity are assumed to be constant, and the speed of sound in the flow is assumed to depend on the elastic properties of the pipe walls. On the basis of the finite-difference analog of the equations of motion and continuity of the flow, the dependences between the velocity and pressure of the flow in an arbitrary pipe section are obtained.

Keywords: pipeline, pressure, speed, fluid flow, difference scheme, stability.

Известно [1], что при перекачивании жидкостей по трубам вязкость потока оказывает влияние на характеристики (скорость, давление) его течения. Оценить это влияние предлагается с помощью метода, основанного на численном решении уравнений движения и неразрывности вязкой сжимаемой жидкости в полностью заполненной однониточной трубе. В этом случае указанные уравнения имеют вид [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{8\nu}{r^2}v = 0 , \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho c_e^2 \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 , \end{cases} \tag{1}$$

где v, p - скорость и давление возмущенного потока в сечении x в момент времени t; ρ - плотность жидкости в невозмущенном потоке; ν - кинематический коэффициент вязкости жидкости; r - радиус трубы;

$c_e = c \cdot \sqrt{E \cdot \delta / (E \cdot \delta + \varepsilon \cdot D)}$ - эффективная скорость звука в потоке с учетом упругости стенок цилиндрической трубы [3] (c - скорость звука в бесконечном объеме жидкости; D и δ - наружный диаметр и толщина стенки трубы; E и ε - модули упругости материала стенки и жидкости).

Если трубопроводная сеть состоит из нескольких участков, то давление и скорость потока в её сечениях должны удовлетворять этим уравнениям, условиям стыковки участков в единую сеть, граничным и начальным условиям всей сети.

Обозначим для конкретного участка через F площадь проходного сечения, а через $G=\rho vF$ - массовый секундный расход. Тогда уравнения (1) принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} + F\cdot\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{8\nu}{r^2}G = 0 \ , \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{c_e^2}{F}\dfrac{\partial G}{\partial x} = 0 \ . \end{cases}$$

Сложим и вычтем эти уравнения с учетом переменных

$$\varphi = \frac{G}{F} + \frac{p}{c_e} \ , \qquad \psi = \frac{G}{F} - \frac{p}{c_e} \ .$$

В итоге имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + c_e\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha(\varphi+\psi) = 0 \ , \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial t} - c_e\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha(\varphi+\psi) = 0 \ . \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha = 4\nu / r^2$.

Построим конечноразностный аналог уравнений (2). Для этого используем разностную схему, в соответствии с которой однородная труба длиной l разбивается вдоль своей продольной оси x на N элементов одинаковой длины $h = l / N$, а время меняется с шагом τ. Обозначим через k номер слоя по t, через n - номер сечения по x. Тогда $n=\overline{1,N+1}$.

Неизвестные φ и ψ на k-том временном слое в сечении n обозначим φ_n^k, ψ_n^k. Частные производные представим в виде

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_n^k = \frac{\varphi_n^{k+1}-\varphi_n^k}{\tau}, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_n^k = \frac{\varphi_n^k-\varphi_{n-1}^k}{h} \ ,$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_n^k = \frac{\psi_n^{k+1}-\psi_n^k}{\tau}, \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_n^k = \frac{\psi_{n+1}^k-\psi_n^k}{h} \ .$$

Теперь уравнения (2) принимают вид

$$\varphi_n^{k+1} + \varphi_n^k\,(\alpha\tau + s - 1) - s\varphi_{n-1}^k + \alpha\tau\psi_n^k = 0, \qquad n=\overline{2,N+1}, \tag{3}$$

$$\psi_n^{k+1} + \psi_n^k\,(\alpha\tau + s - 1) - s\psi_{n+1}^k + \alpha\tau\varphi_n^k = 0, \quad n=\overline{1,N}\,. \tag{4}$$

Здесь $s = c_e\tau / h$ - критерий Куранта [4].

Формулы (3) и (4) позволяют определить функции φ и ψ на очередном $(k+1)$ - ом временном слое через их известные значения на предыдущем временном слое.

Возвращаясь к переменным v и p, из уравнений (3) и (4) находим зависимости, связывающие давление и скорость на границах участка ($n=1$ и $n=N+1$)

$$c_e\rho v_1^{k+1} - p_1^{k+1} = p_1^k(s-1) - c_e\rho v_1^k(2\alpha\tau + s - 1) + s(c_e\rho v_2^k - p_2^k) \ , \tag{5}$$

$$c_e\rho v_{N+1}^{k+1} + p_{N+1}^{k+1} = -p_{N+1}^k(s-1) - c_e\rho v_{N+1}^k(2\alpha\tau + s - 1) + s(c_e\rho v_N^k + p_N^k) \ , \tag{6}$$

а также в его промежуточных сечениях ($n=\overline{2,N}$)

$$v_n^{k+1} = \frac{s}{2}\left[v_{n-1}^k + v_{n+1}^k + \frac{1}{c_e\rho}(p_{n-1}^k - p_{n+1}^k)\right] - v_n^k(2\alpha\tau + s - 1) \ , \tag{7}$$

$$p_n^{k+1} = \frac{s}{2}\left[p_{n-1}^k + p_{n+1}^k + c_e\rho(v_{n-1}^k - v_{n+1}^k)\right] - p_n^k(s-1)\,. \tag{8}$$

Как показано в теории разностных схем [4], решение разностных схем (3) и (4) будет сходиться к точному решению системы (1) лишь при определенной зависимости между шагами сетки по x и t, то есть между h и τ. Обычно для доказательства сходимости решения проверяют устойчивость конечно-разностной схемы. Об устойчивости схемы судят по поведению частных сеточных решений, имеющих вид гармоник

$$y_n^k = W \cdot q^k \xi^n \ , \quad \xi = e^{i\gamma} = \cos\gamma + i \cdot \sin\gamma \quad , \quad |\,\xi\,| = 1 \, . \tag{9}$$

Здесь i - мнимая единица, n и k - пространственные и временные номера узлов сетки, γ - произвольное действительное число. Величина q - комплексное число, которое подбирается так, чтобы гармоника удовлетворяла разностному уравнению. При этом $|\,q\,|$ может принимать любое значение. Если окажется, что для некоторых γ модуль $|\,q\,| > 1$, то соответствующие гармоники со временем будут неограниченно возрастать, что свидетельствует о неустойчивости разностной схемы. Если $|\,q\,| \le 1$, то разностная схема устойчива.

В соответствии с (9) примем

$$\varphi_n^k = U \cdot q^k \xi^n \ , \quad \psi_n^k = V \cdot q^k \xi^n \ , \quad \xi = e^{i\gamma} \ . \tag{10}$$

Подставив (10) в уравнения (3), (4) и разделив оба уравнения на $q^k \xi^n$, получаем

$$U(q + \alpha\tau + s - 1 - \frac{s}{\xi}) + V \cdot \alpha\xi = 0 \quad ,$$

$$U \cdot \alpha\tau + V(q + \alpha\tau + s - 1 - s\xi) = 0 \quad .$$

Так как U и V одновременно не равны нулю, то

$$(q + \alpha\tau + s - 1 - \frac{s}{\xi})(q + \alpha\tau + s - 1 - s\xi) - \alpha^2\tau^2 = 0 \quad ,$$

или, с учетом того, что $\xi + \dfrac{1}{\xi} = 2 \cdot \cos\gamma$, имеем уравнение

$$q^2 - 2q[1 - \alpha\tau - s(1 - \cos\gamma)] + \lambda^2 + s^2 - \alpha^2\tau^2 - 2s \cdot \lambda \cdot \cos\gamma = 0 \quad ,$$

где $\lambda = \alpha\tau + s - 1$.

Корни этого уравнения имеют вид

$$q_{1,2} = (1 - \alpha\tau - 2s \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}) \mp i \cdot \sqrt{\beta} \quad ,$$

$$\beta = -(1 - \alpha\tau - 2s \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2})^2 + \lambda^2 + s^2 - \alpha^2\tau^2 - 2s \cdot \lambda(1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}) \quad .$$

Отсюда находится квадрат модуля двух комплексно-сопряженных корней

$$|\,q\,|^2 = \lambda^2 + s^2 - \alpha^2\tau^2 - 2s \cdot \lambda \cdot (1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}) \, .$$

Чтобы для всех γ выполнялось условие устойчивости $|\,q\,|^2 \le 1$ разностной схемы, необходимо и достаточно выполнения данного неравенства при максимальном значении $\sin^2\dfrac{\gamma}{2}$, равном 1.

После преобразований условие устойчивости принимает вид

$$s^2 + s(\alpha\tau - 1) - \frac{1}{2}\alpha\tau \le 0 \, ,$$

а с учетом того, что s может быть только положительной величиной, имеем

$$0 < s \le \frac{1}{2}(1 - \alpha\tau + \sqrt{1 + \alpha^2\tau^2}) \quad .$$

Раскрывая значение $s = c_e\tau / h$, получаем неравенство

$$0 < \tau \le \frac{(2c_e + \alpha h)h}{2c_e(c_e + \alpha h)}, \tag{11}$$

определяющее зависимость между шагами τ и h, при которой предлагаемая разностная схема решения уравнений (1) устойчива. Тогда

$$0 < s \le \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1 + \alpha h / c_e}) \quad . \tag{12}$$

Теперь τ и s, определяемые неравенствами (11) и (12), следует использовать в уравнениях (5) - (8) для вычисления давления и скорости потока жидкости в различных сечениях трубы.

В заключение отметим, что в случае пренебрежения влиянием вязкости жидкости на характеристики ее течения, то есть, полагая $\alpha = 0$, из (11), (12) следует $s \le 1$, $\tau \le h / c_e$, и уравнения (5) и (8) полностью совпадают с соответствующими уравнениями, приведенными в [5].

***

1. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975.
2. Колесников К. С. Продольные колебания ракеты с жидкостным ракетным двигателем. – М.: Машиностроение, 1971.
3. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. – Л.: ГИТТЛ, 1949.
4. Самарский А.А. Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992.
5. Бондаренко Н.И., Терентьев Ю.И. К вопросу об определении давленияв трубопроводе при его закрытии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2012. Спец. выпуск, № 8, с. 69-78.